Terceira Prova de Teoria Eletromagnética I, 04/07/2011

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(3,0 pontos)* Considere o potencial vetor $\vec{A}$ gerado por uma distribuição volumétrica de correntes estacionárias localizadas no espaço. Adote o calibre de Coulomb para definir $\vec{A}$.

(a) *(1,5 pontos)* A partir da lei de Ampère, obtenha uma equação de Poisson para $\vec{A}$ e escreva sua solução formal.

(b) *(1,5 pontos)* A partir do teorema de Helmholtz, obtenha $\vec{A}$ e mostre que o resultado é equivalente à solução obtida no item (a).

(2ª questão) *(4,0 pontos)* Considere um disco uniformemente carregado com densidade de carga σ e raio R, o qual está sobre o plano XY, com o eixo Z passando por seu centro. O disco gira ao redor do eixo Z com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$.

(a) *(2,0 pontos)* Determine o campo magnético em uma distância arbitrária z acima do centro do disco.

(b) *(2,0 pontos)* Determine o momento de dipolo magnético do disco. **Sugestão**: Lembre-se que, para uma distribuição linear de corrente, temos que $\vec{m} = \int I\, d\vec{a} = \frac{1}{2}\int \vec{r'} \times I d\vec{l'}$, o que implica que, para uma distribuição superficial de corrente, podemos usar

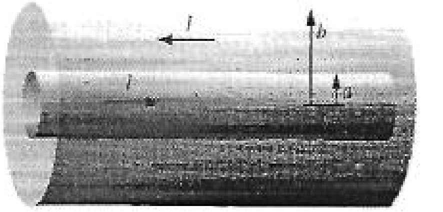
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r'} \times \vec{K}(\vec{r'})da',$$

(3ª questão) *(3,0 pontos)* Um cabo coaxial consiste de dois tubos cilíndricos muito longos (de raios a e b), separados por mateiral isolante linear de suscetibilidade χ_m. Uma corrente I passa pelo condutor interno e retorna ao longo do condutor externo; em cada caso a corrente se distribui uniformemente sobre a superfície. O sistema está representado na figura abaixo.

(a) *(1,5 pontos)* Determine as densidades de correntes volumétrica e superficial de magnetização no cabo coaxial.

(b) *(0,5 pontos)* Determine a corrente total englobada por uma curva Amperiana entre os dois tubos cilíndricos.

(c) *(1,0 ponto)* Determine o campo magnético para distâncias radiais $s < a$, $a < s < b$ e $s > b$.



Formulário:

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} T) d\tau = \oint_{\mathcal{S}} T d\vec{a}, \qquad \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{v} \times d\vec{a}, \qquad \int_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} T) \times d\vec{a} = -\oint_{\mathcal{P}} T d\vec{l}.$$

TERCEIRA PROVA DE ELETRO I — 2011/1

GABARITO

(1ª Questão)

(a) Lei de Ampère: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$

1,0 $\Rightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{0}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}}$ → Eq. de Poisson para $\vec{A}(\vec{r})$

0 (calibre de Coulomb)

Solução da Eq. de Poisson: $\nabla^2 X = -Y \Rightarrow X(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{Y(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'$

0,5 Logo: $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'}$ → Solução da Eq. de Poisson.

(b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Calibre de Coulomb)

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

Teorema de Helmholtz: $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U + \vec{\nabla} \times \vec{W}$

0,5 Com $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{r}\,'))}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'$ e $W(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{\nabla}' \times \vec{A}(\vec{r}\,'))}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_V \frac{\vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' = \frac{1}{4\pi} \int_V \Big[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}\,')}_{0} - \vec{B} \times \underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)}_{= -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right)} \Big] d\tau'$$

1,0

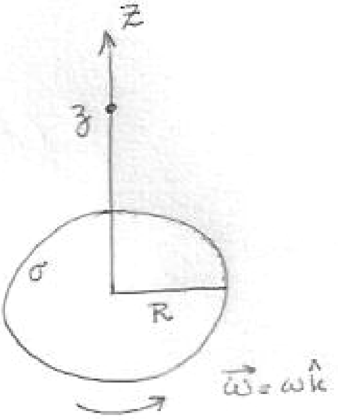
$$= \frac{1}{4\pi} \int_V \Big[\frac{\overbrace{\vec{\nabla}' \times \vec{B}(\vec{r}\,')}^{\mu_0 \vec{J}(\vec{r}\,')}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \vec{\nabla}' \times \left(\frac{\vec{B}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \Big] d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \Big[\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau' + \underbrace{\oint_S \frac{\vec{B}(\vec{r}\,') \times d\vec{a}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}_{0} \Big]$$

0 (V é todo o espaço)

$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\tau'}$ → Mesma solução obtida no item (a).

(2ª Questão)

(a)



Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, da'$$

Mas $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \sigma\omega\hat{k}\times s\hat{s}$

$= \sigma\omega s\,\hat{\varphi}$ 0,5

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\sigma\omega s\,\hat{\varphi}\times(z\hat{k} - s\hat{s})}{(z^2+s^2)^{3/2}}\, s\,ds\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\cancel{\iint \frac{\sigma\omega s z\,\overbrace{\hat{s}}^{(\cos\varphi\hat{i}+\operatorname{sen}\varphi\hat{j})}}{(z^2+s^2)^{3/2}}(s\,ds\,d\varphi)} + \iint \frac{\sigma\omega s^2\,\hat{k}}{(z^2+s^2)^{3/2}}(s\,ds\,d\varphi)\right]$$

0, pois $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0$.

1,0

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\pi\,\sigma\omega\int_0^R \frac{s^3}{(z^2+s^2)^{3/2}}\,ds\;\hat{k}$$

$u = z^2+s^2$, $du = 2s\,ds$; $s\to 0 \Rightarrow u \to z^2$; $s \to R \Rightarrow u \to R^2+z^2$

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_{z^2}^{z^2+R^2}\frac{(u-z^2)(du/2)}{u^{3/2}}\,\hat{k} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4}\left[\int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-1/2}du - z^2\int_{z^2}^{z^2+R^2}u^{-3/2}du\right]\hat{k}$$

0,5

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_{z^2}^{z^2+R^2} - z^2\,\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)}\Big|_{z^2}^{z^2+R^2}\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\sqrt{z^2+R^2} - |z| + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{z^2}{|z|}\right]\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{z^2+R^2}} - 2|z|\right]\hat{k}}$$

(b)

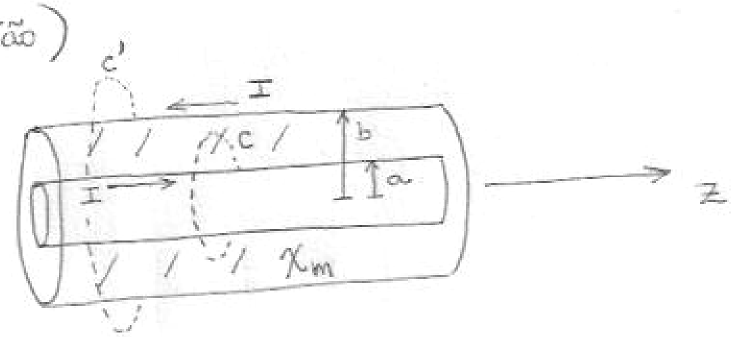
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_S \vec{r}' \times \vec{K}(\vec{r}')\, da' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (s\hat{s} \times \sigma\omega s\hat{\varphi})\, s\, ds\, d\varphi$$ 1,0

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\sigma\omega \cancel{2}\pi \int_0^R s^3\, ds\ \hat{k} \Rightarrow \vec{m} = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}\hat{k}$$

1,0

$$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = \frac{\pi\sigma R^4}{4}\vec{\omega}}$$ (Momento magnético do disco)

(3ª Questão)



(a)

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \Rightarrow H\, 2\pi s = I \Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi s}\hat{\varphi}}$$

0,5 Material linear: $\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{M} = \frac{\chi_m I}{2\pi s}\hat{\varphi}}$

0,5 Densidade volumétrica de corrente de magnetização: $\boxed{\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0}$

0,5 Densidades superficiais de corrente de magnetização: $\boxed{\vec{K}_M = \vec{M}\times\hat{n} = \begin{cases} -\dfrac{\chi_m I}{2\pi b}\hat{k} & (s=b) \\ \dfrac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{k} & (s=a) \end{cases}}$

(b) Corrente englobada por C: $\underbrace{I_{eng} = I + \int_0^{2\pi}\frac{\chi_m I}{2\pi a}(a\, d\varphi)}_{0,3} \Rightarrow \underbrace{\boxed{I_{eng} = (1+\chi_m)I}}_{0,2}$

(c) 0,5

$\rightarrow$ $s<a$: $\vec{M}=0$; $\vec{H}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}=0}$

$a<s<b$: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi s}\hat{\varphi} \Rightarrow \vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi s}\hat{\varphi}}$ 0,5

$\rightarrow$ $s>b$: $\oint_{C'}\vec{H}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{H}=0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}=0}$